

ΝΑ ΔΟ
ΛΥΣΗ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{3x-2} = L$ (Βάση του ϵ - δ ορίσμου)

Αρκεί

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}) : 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2}{3x-2} - 1 \right| < \epsilon$$

Το $-1 \in \Delta(f)$ άρα είναι

σημείο συσσώρευσης

Έχουμε

$$\left| \frac{x^2}{3x-2} - 1 \right| = \frac{|x^2 - 3x + 2|}{|3x-2|} = \frac{|x-1| \cdot |x-2|}{|3x-2|} \quad (1)$$

Προσέχουμε στην τελική επιλογή του δ

Αν επιδιώξουμε να πάρουμε $\delta < 1$ θα καταλήξουμε σε άτοπο σε σχέση με την (1).

Άρα σε τέτοιες περιπτώσεις θα παίρνουμε

το μέσο του μισού του μεμονωμένου γιγείου του $\Delta(f)$. Δηλαδή το $\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Άρα $\delta < \frac{1}{6}$

$$\bullet |x-1| < \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < x-1 < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{6} < x < \frac{7}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} < 3x < \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 3x-2 < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{3x-2} < 2$$

$$\bullet \frac{5}{6} < x < \frac{7}{6} \Rightarrow -\frac{7}{6} < x-2 < -\frac{5}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} < -(x-2) < \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{5}{6} < |x-2| < \frac{7}{6}$$

$$\text{Άρα } (1) < 2 \cdot \frac{7}{6} \cdot \delta < \epsilon \Rightarrow \delta < \frac{3\epsilon}{7}$$

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{6}, \frac{3\epsilon}{7} \right\}$$

SKAG